

ВОЗМУЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ШТАРКА (О.Ш.) И ЕГО S-ФУНКЦИЯ

А.Р.АХМЕДОВА

Гянджинский Государственный Университет

e_quliyev@gdu-ri.com

В данной статье находятся линейно-независимые решения для оператора Штарка. С помощью этих решений находится решение $H_{\frac{1}{3}}^{(1)} = \left\{ \frac{2}{3}(x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\}$ принадлежащее пространству $L_2(0, \infty)$ при $\text{Im } \lambda > 0$. Вычисляется производная спектральной функции оператора Штарка, выводится равенство Парсевалля, доказывается существование оператора преобразования с условием на бесконечности при условии на потенциал $p(x)$:

$$\int_0^{+\infty} (1+x^4) e^{\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}} |p(x)| dx < \infty.$$

С помощью оператора преобразования доказывается, что асимптотика нормированных собственных функций непрерывного спектра оператора Штарка определяется функцией рассеяния $S(\lambda)$.

1. В данной работе исследуется прямая задача теории рассеяния для оператора L в $L_2(0, \infty)$, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv -y'' - [x - p(x)]y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1.1)$$

и граничным условием

$$y(0) = 0. \quad (1.2)$$

Такой оператор описывает влияние потенциала электрического поля и его называют оператором Штарка (О.Ш.) [1].

Предполагается, что вещественная и непрерывно-дифференцируемая функция $p(x)$ дополнительно удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} (1+x^4) e^{\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}} |p(x)| dx < \infty. \quad (1.3)$$

2. Равенство Парсевалля при $p(x) \equiv 0$

Доказано, что решениями уравнения [2],[9]

$$y'' + (x + \lambda)y = 0 \quad (2.1)$$

являются функции

$$\sqrt{x+\lambda} J_{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{2}{3} (x+\lambda)^{\frac{3}{2}} \right\} \text{ и } \sqrt{x+\lambda} Y_{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{2}{3} (x+\lambda)^{\frac{3}{2}} \right\},$$

а их вронскиан равен $\frac{3}{\pi}$.

Обозначим через $\varphi_0(x, \lambda), \theta_0(x, \lambda)$ решения уравнения (2.1) с начальными условиями:

$$\varphi_0(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_0'(0, \lambda) = 1, \quad (2.2)$$

$$\theta_0(0, \lambda) = 1, \quad \theta_0'(0, \lambda) = 0. \quad (2.3)$$

Методом вариации постоянных доказано [2],[9], что

$$\varphi_0(x, \lambda) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\lambda} \sqrt{x+\lambda} \left\{ J_{\frac{1}{3}}(X) Y_{\frac{1}{3}}(Z) - Y_{\frac{1}{3}}(X) J_{\frac{1}{3}}(Z) \right\},$$

$$\theta_0(x, \lambda) = \frac{\pi}{3} \lambda \sqrt{x+\lambda} \left\{ J_{\frac{1}{3}}(X) Y_{\frac{1}{3}}'(Z) - Y_{\frac{1}{3}}(X) J_{\frac{1}{3}}'(Z) \right\},$$

где $X = \frac{2}{3}(x+\lambda)^{\frac{3}{2}}, Y = \frac{2}{3}(y+\lambda)^{\frac{3}{2}}, Z = \frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}}$.

Заметим, что функция $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(X) = J_{\frac{1}{3}}(X) + iY_{\frac{1}{3}}(X)$ содержит множитель

$e^{iX} = e^{\frac{2i}{3}(x+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = e^{\frac{2i}{3}x^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3\lambda}{2x} + \dots\right)}$, который при $\text{Im } \lambda > 0$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$, а остальные решения при этом возрастают так, что функция [2] $\psi_0^+(x+\lambda) = \theta_0(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi_0(x, \lambda)$ может отличаться от $\sqrt{x+\lambda} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(X)$ лишь

постоянным множителем

$$\psi_0^+(x+\lambda) = C \sqrt{x+\lambda} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left\{ \frac{2}{3} (x+\lambda)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Отсюда $m_0(\lambda) = -\frac{\psi_0^{+'}(0, \lambda)}{\psi_0^+(0, \lambda)}$. Тогда производная $K_0(\lambda)$ от спектральной функции, порожденная задачей (2.1)-(1.2), определяется, как известно [2] следующим образом $K_0(\lambda) = -\text{Im } m_0(\lambda)$ при вещественных λ .

Вычисления показывают, что

$$K_0(\lambda) = -\frac{1}{2i} \frac{W_0[\psi_0^+(x, \lambda); \overline{\psi_0^+(x, \lambda)}]_{x=0}}{|\psi_0^+(0, \lambda)|} = \frac{3}{\pi \lambda \left[J_{\frac{1}{3}}^2(Z) + Y_{\frac{1}{3}}^2(Z) \right]} = \frac{3}{\pi \lambda \left| H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(Z) \right|^2}, \quad \left(Z = \frac{2}{3} \lambda^{\frac{3}{2}}, \lambda > 0 \right)$$

Поэтому формула разложения выглядит так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x, \lambda) \varphi_0(t, \lambda) K_0(\lambda) d\lambda = \delta(x-t).$$

3. Оператор преобразования с условием на бесконечности

Здесь мы приведем условия существования оператора преобразования Б.Я.Левина [4].

Теорема 3.1. Пусть выполняется условие (1.3). Тогда при любом λ , $\text{Im } \lambda > 0$ уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет решение с условием

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi^+(x, \lambda) (\psi_0^+)^{-1}(x, \lambda) = 1, \quad (3.1)$$

и существует ядро $H(x, t)$ такое, что

$$\psi_0^+(x, \lambda) = \psi^+(x, \lambda) + \int_x^{+\infty} H(x, t) \psi^+(t, \lambda) dt. \quad (3.2)$$

Причем ядро $H(x, t)$ и его производные первого порядка удовлетворяют неравенствам:

$$1) |H(x, t)| \leq \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{x+t}{2} \right) e^{\rho_1 \left(\frac{x+t}{2} \right)}; \quad (3.3)$$

$$2) \left| \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{4} p \left(\frac{x_1 + x_2}{4} \right) \right| \leq C_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^{-4} \rho_4 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \exp \left\{ \rho_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right\}, \quad (3.4)$$

$$\text{где } \rho_j(x) = \int_x^{+\infty} (1 + \alpha^j) e^{\sqrt{2} \alpha^{\frac{1}{2}}} |p(\alpha)| d\alpha, \quad (j = 0, 4), \rho_0(x) = \rho_1(x); \quad (3.5)$$

3) $H(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$H_{xx}'' - H_{tt}'' + (x-t)H = -H(x, t)p(t) \quad (3.6)$$

и условиям

$$H(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} p(\alpha) d\alpha, \quad (3.7)$$

$$H(x, t) = 0, \text{ при } x > t, \lim_{x \rightarrow t \rightarrow \infty} H(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \rightarrow \infty} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.8)$$

Доказательство этой теоремы проводится в несколько этапов [1], с помощью обобщения метода Римана [3].

Замечание 3.1. Поскольку H^∞ является вольтеровским оператором, то оператор $(1 + H^\infty)$ имеет обратный, того же вида, который обозначим через $(1 + K^\infty)$. Поэтому наряду с формулой (3.2) справедливо равенство

$$\psi^+(x, \lambda) = \psi_0^+(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K(x, t) \psi_0^+(t, \lambda) dt \quad (3.9)$$

для ядра $K(x, t)$ и его производных справедливы оценки вида (3.3) и (3.4).

4. Разложения по собственным функциям оператора L

Если $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (1.1) с условиями (2.2)-(2.3), то получаем:

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{W_0(\lambda)} \left[\psi^+(x, \lambda) \bar{\psi}^+(0, \lambda) - \bar{\psi}^+(x, \lambda) \psi(0, \lambda) \right], \quad (4.1)$$

где

$$W_0(\lambda) = \psi_0^+(0, \lambda) \bar{\psi}_0^+(0, \lambda) - \psi_0^+(\lambda) \bar{\psi}_0^+(0, \lambda). \quad (4.2)$$

Из формулы (3.9) замечаем, что

$$\psi^+(0, \lambda) = \psi_0^+(0, \lambda) \eta_1(\lambda), \quad (4.3)$$

где

$$\eta_1(\lambda) = 1 + \int_0^x K(0, t) F_0(t, \lambda) dt, \quad F_0(t, \lambda) = \frac{\psi_0^+(t, \lambda)}{\psi_0^+(0, \lambda)}. \quad (4.4)$$

Учитывая формулу (4.3) и (4.1), имеем:

$$U(x, \lambda) = \frac{1}{W_0(\lambda)} \left[\psi^+(x, \lambda) \bar{\psi}^+(0, \lambda) S(\lambda) - \bar{\psi}^+(x, \lambda) \psi(0, \lambda) \right], \quad (4.5)$$

где

$$U(x, \lambda) = \frac{\varphi(x, \lambda)}{\eta_1(\lambda)}, \quad S(\lambda) = \frac{\bar{\eta}_1(\lambda)}{\eta_1(\lambda)}. \quad (4.6)$$

$S(\lambda)$ назовем S -функцией граничной задачи (1.1)-(1.2).

Подставляя в формулу (4.5) выражение

$$U(x, \lambda) = \left[\psi_0^+(x, \lambda) \bar{\psi}_0^+(0, \lambda) S(\lambda) - \bar{\psi}_0^+(x, \lambda) \psi_0^+(0, \lambda) \right] + \int_x^\infty K(x, t) \left[\psi_0^+(t, \lambda) \bar{\psi}_0^+(0, \lambda) S(\lambda) - \bar{\psi}_0^+(t, \lambda) \psi_0^+(0, \lambda) \right] dt. \quad (4.7)$$

получаем, что при $x \rightarrow \infty$ асимптотика «обобщенных» нормированных собственных функций непрерывного спектра оператора L определяется функцией $S(\lambda)$. Имеет место

Лемма 4.1. S -функция граничной задачи (1.1)-(1.2) обладает свойствами:

- а) она определена на всей вещественной оси $-\infty < \lambda < +\infty$;
- б) $\bar{S}(\lambda) = S^{-1}(\lambda)$.

Доказательство этой леммы очевидно.

Автор выражает благодарность проф. Дж.И.Мамедханову и доц. Б.А.Мустафаеву за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качалов А.П., Курылев Я.В. Метод операторов преобразования в обратной задаче. Одномерный Штарк-эффект //Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 179, с.73-87.
2. Титчмарш Э.У. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями II-го порядка. М.: Иностран.лит. 1960, т. I, 277 с.
3. Кошляков Н.С. и другие. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970, 712 с.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984, 230 с.
5. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977, 330 с.

6. Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А. Обратная задача теории рассеяния для возмущенного ангармонического уравнения на полуоси // ДАН СССР, 1976, т. 228 №1, с.11-14.
7. Агранович З.С., Марченко В.А. Обратная задача теории рассеяния. X. Ордена труда Красного знамени Гос. Университета имени А.М.Горьково. Харьков: 1960, 226 с.
8. Мустафаев Б.А. Обратная задача теории рассеяния для одного класса возмущенных операторов Штурма-Лиувилля с непрерывным спектром на полуоси // «Научные вести», Азербайджанский Технологический Университет, Гянджа: 2004, №1-2, с. 21-25.
9. Ахмедова А.Р. Исследования решения финитновозмущенного уравнения Штурма на полуоси // «Научные вести», Азербайджанский Технологический Университет, 2008, №7-8, с. 20-24.

ŞTARK OPERATORU VƏ SƏPİLMƏ FUNKSIYASI

A.R.ƏHMƏDOVA

XÜLASƏ

Məqalədə yarımoxda Şark tənliyinin xətti asılı olmayan həlləri tapılır. Bu həllərin köməyilə $L_2(0, \infty)$ fəzasına daxil olan $H_{\frac{1}{3}}^{(l)} = \left\{ \frac{2}{3}(x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\}$ həlli qurulur ($\text{Im } \lambda > 0$). Sonra

isə Şark operatoru üçün Parseval bərabərliyinin, spektral funksiyanın varlığı, eləcə də $p(x)$ potensialı üzərinə aşağıdakı şərt daxilində

$$\int_0^{+\infty} (1+x^4) e^{\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}} |p(x)| dx < \infty,$$

çevirmə operatorun varlığı isbat olunur. Çevirmə operatorun köməyilə isbat edilir ki, L operatorun kəsilməz spektrin məxsusi funksiyalarının asimptotikası səpilmə funksiyası ilə tapılır.

STARK OPERATOR AND THE SCATTERING FUNCTION

A.R.AHMADOVA

SUMMARY

In this paper we consider direct and inverse problem in the scattering theory for the operator L in $L_2(0, \infty)$, generated by the differential expression $l(y) \equiv -y'' - [x - p(x)]y$ with the boundary condition $y(0) = 0$. We assume that real and continuously differentiable

function $p(x)$ satisfies the additional condition $\int_0^{+\infty} (1+x^4) e^{\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}} |p(x)| dx < \infty$. In the case

$p(x) \equiv 0$ one can show that the $\psi_0^+(x + \lambda) = \sqrt{x + \lambda} H_{\frac{1}{3}}^{(l)} \left\{ \frac{2}{3}(x + \lambda)^{\frac{3}{2}} \right\}$ - is a solution of the

equation $y'' + (x + \lambda)y = 0$, and $\psi_0^+(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, for $\text{Im } \lambda > 0$. Parsifal's relation for $p(x) \equiv 0$. Here we introduce conditions for the existence of a transformation operator with condition at finity.